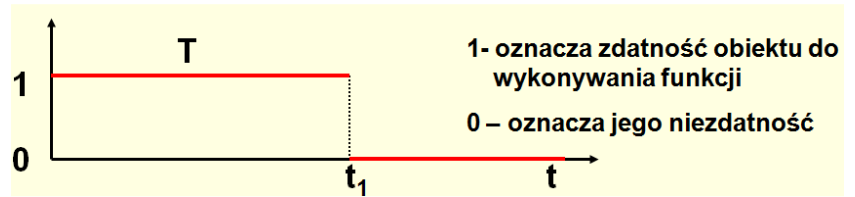


Elementy teorii niezawodności

Ćwiczenia nr 1: Obiekty proste nieodnawialne

Jedynym istotnym zdarzeniem w eksploatacji obiektu prostego nieodnawialnego jest chwila jego uszkodzenia. Wtedy traci on własność realizacji przewidzianych funkcji (zadań).



Przyjmujemy rozkład czasu T do uszkodzenia: **wykładniczy z parametrem $\lambda = 10^{-8}$ [1/h]**.

Dlaczego rozkład wykładniczy jest „ahistoryczny”, „bez pamięci” ?

Wyznamy wartości prawdopodobieństw: $P\{T \geq t_1 + t | T \geq t_1\}$ i $P\{T \geq t_2 + t | T \geq t_2\}$

$$P\{T > t\} = 1 - P\{T \leq t\} = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}$$

$$P\{T \geq t_1 + t | T \geq t_1\} = \frac{P\{T \geq t_1 + t\}}{P\{T \geq t_1\}} = \frac{e^{-\lambda(t_1+t)}}{e^{-\lambda t_1}} = e^{-\lambda t} = P\{T > t\}$$

$P\{T \geq t_1 + t | T \geq t_1\}$ i $P\{T \geq t_2 + t | T \geq t_2\}$ są takie same i nie zależą od t_1 i t_2 .

Niestarzenie się elementu oznacza, że prawdopodobieństwo awarii w danym przedziale czasu nie zależy od wieku elementu. Określamy tę własność jako brak pamięci rozkładu wykładniczego.

Miary funkcyjne niezawodności

1. Dystrybuanta $F(t) = P\{T \leq t\}$

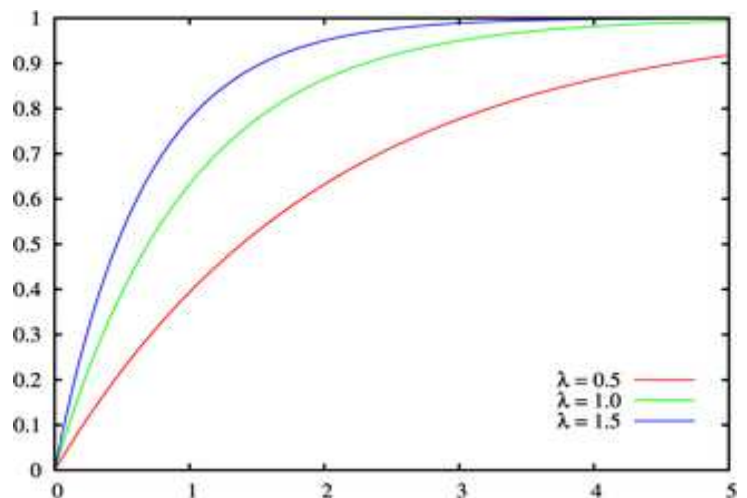
Własności dystrybuanty:
ciągła, niemalejąca, $F(-\infty) = 0, F(\infty) = 1$

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{dla } t \geq 0 \end{cases}$$

$$F(0) = 1 - e^{-\lambda \cdot 0} = 0; F(\infty) = 1 - e^{-\lambda \cdot \infty} = 1$$

Czy funkcja jest stale rosnąca:

$$\frac{dF(t)}{dt} = -e^{-\lambda t} \times (-\lambda) = \lambda e^{-\lambda t}$$



Wartość dystrybuanty $F(t)$ określa prawdopodobieństwo, że czas awarii jest mniejszy niż t . Czyli, że obiekt się popsuje do chwili t .

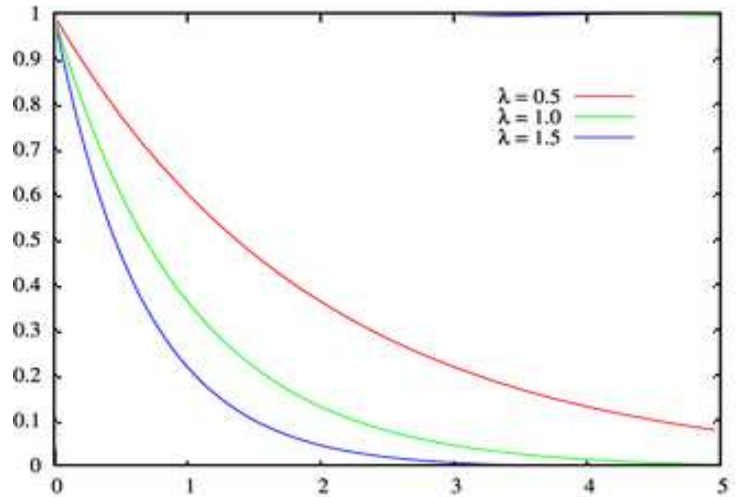
- Zadanie 1:** Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że uszkodzenie wystąpi do chwili t_1

$$P\{T \geq t_1\} = F(t_1)$$

2. Funkcja niezawodności $R(t) = 1 - F(t) = P\{T > t\}$

$$R(0) = e^{-\lambda \cdot 0} = 1; R(\infty) = e^{-\lambda \cdot \infty} = 0$$

$$\forall t \geq 0: R(t) + F(t) = 1$$



Wartość funkcji niezawodności $R(t)$ określa prawdopodobieństwo, że czas awarii będzie większy niż t . Czyli, że obiekt się nie psuje do chwili t .

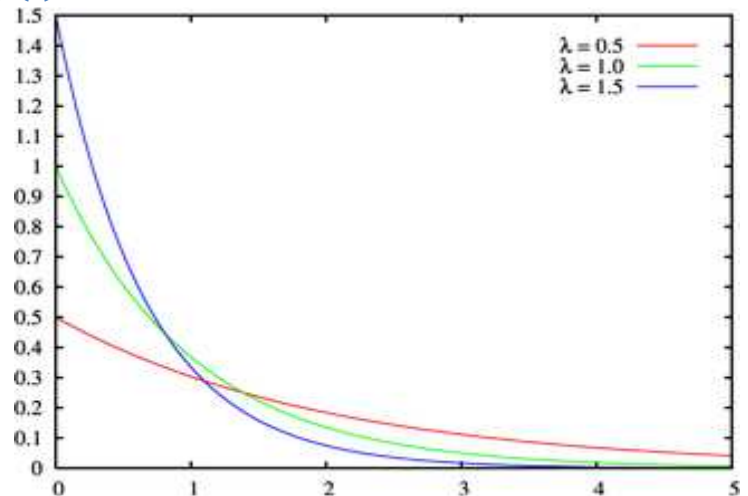
- Zadanie 2:** Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że uszkodzenie wystąpi po chwili t_2

$$P\{T < t_2\} = 1 - F(t_2) = R(t_2)$$

3. Gęstość rozkładu zmiennej losowej $T, f(t)$

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = -e^{-\lambda t} \times (-\lambda) = \lambda e^{-\lambda t}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \int_0^{\infty} \frac{dF(t)}{dt} dt = [F(t)]_0^{\infty} = 1 - 0 = 1$$



Wartość funkcji gęstości $f(t)$ określa rozłożenie masy prawdopodobieństwa na wszystkich możliwych chwilach awarii. Czyli, prawdopodobieństwo, że obiekt się psuje w chwili t .

- Zadanie 3:** Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że uszkodzenie wystąpi w przedziale (t_3, t_4)

$$P\{t_3 < T < t_4\} = F(t_4) - F(t_3) = \int_{t_3}^{t_4} f(t) dt$$

4. Funkcja intensywności uszkodzeń, $\lambda(t)$

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda$$

funkcja stała, czyli obiekt się nie starzeje, a rozkład ahistoryczny

5. Funkcja wiodąca, $\Lambda(t)$

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u) du = \int_0^t \lambda du = \lambda \int_0^t (u) du = \lambda [u]_0^t = \lambda t$$

funkcja ma sens resursu czasu życia wykorzystanego przez obiekt,
 np.: $\Lambda(10^5) = 10^{-8} * 10^5 = 0,001$ - dla 100000 godzin wykorzystana została dopiero tysięczna część resursu do awarii.

- Zadanie 4:** Wyznaczyć wykorzystanie resursu życia obiektu do chwili t_5

$$\Lambda(t_5)$$

Wyznaczyć kiedy obiekt wykorzysta połowę resursu życia

$$t = \Lambda^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

6. Warunkowe prawdopodobieństwo braku awarii w przedziale czasu, $R_t(\tau)$

$$R_t(\tau) = \frac{R(t+\tau)}{R(t)} = \frac{e^{-\lambda(t+\tau)}}{e^{-\lambda t}} = \frac{e^{-\lambda t} e^{-\lambda \tau}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda \tau}$$

Widać, że obiekt jest „bez pamięci”, ponieważ chwila t nie wpływa na wartość prawdopodobieństwa.

- Zadanie 5:** Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że obiekt nie popsuje się w przedziale czasu $(t_6, t_6 + \tau)$ jeżeli do chwili t_6 był sprawny

$$R_{t_6}(\tau) = e^{-\lambda \tau}$$

7. Bezwarunkowe prawdopodobieństwo braku awarii w przedziale czasu, $P(t, t + \tau)$

$$P(t, t + \tau) = 1 - \int_t^{t+\tau} f(u) du = 1 - [R(t) - R(t + \tau)] = 1 - [e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(t+\tau)}] = 1 - e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda \tau})$$

$$[R(t) - R(t + \tau)] = [F(t + \tau) - F(t)]$$

- Zadanie 6:** Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że obiekt nie popsuje się w przedziale czasu $(t_7, t_7 + \tau)$

$$P(t_7, t_7 + \tau) = 1 - e^{-\lambda t_7} (1 - e^{-\lambda \tau})$$

Miary liczbowe niezawodności

8. Wartość oczekiwana czasu do awarii, $E\{T\} = \theta$

$$E\{T\} = \theta = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \int_0^{\infty} t \lambda e^{-\lambda t} dt = \int_0^{\infty} R(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt = \left[\frac{1}{-\lambda} e^{-\lambda t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

9. Wariancja czasu do awarii, $V\{T\}$

$$V\{T\} = \int_0^{\infty} [t - E\{T\}]^2 f(t) dt = \frac{1}{\lambda^2}$$

10. Odchylenie standardowe czasu do awarii, $\sigma\{T\}$

$$\sigma\{T\} = \sqrt{V\{T\}} = \sqrt{\int_0^{\infty} [t - E\{T\}]^2 f(t) dt} = \frac{1}{\lambda}$$

11. Kwantyl rzędu p , t_p

$$F(t_p) = p$$

$$F(t_p) = 1 - e^{-\lambda t_p} = p$$

$$e^{-\lambda t_p} = 1 - p \quad / \ln$$

$$-\lambda t_p = \ln(1 - p)$$

$$t_p = \frac{1}{-\lambda} \ln(1 - p)$$

- **Zadanie 7:** Wyznaczyć czas do którego obiekt popsuje się z prawdopodobieństwem p_1

$$t_{p_1} = \frac{1}{-\lambda} \ln(1 - p_1)$$