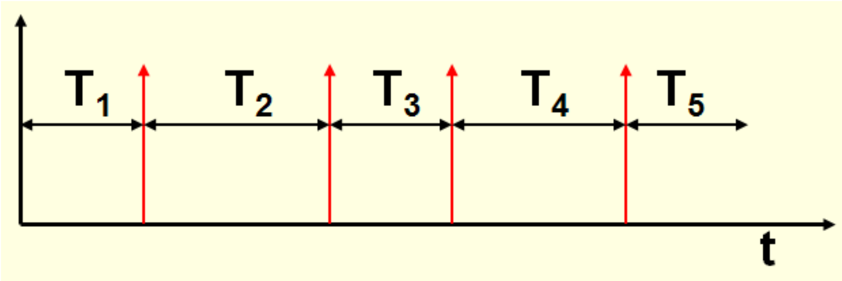
Elementy teorii niezawodności

Ćwiczenia nr 2: Obiekty proste odnawialne z zerowym czasem odnowy

Jedynymi istotnymi zdarzeniami w eksploatacji obiektu prostego odnawialnego z zerowa odnową są chwile uszkodzeń, które przy zerowej odnowie, są jednocześnie chwilami odnów.



Przyjmujemy rozkład czasu T do uszkodzenia**: wykładniczy z parametrem $\boldsymbol{\lambda = 10^{-8}}$ [1/h].**

Strumienie odnów

Proste

Wszystkie zmienne losowe $T_1, T_2, \ldots$ mają identyczne rozkłady określone:

- dystrybuantą $\boldsymbol{F(t)}$,
- gęstością $\boldsymbol{f(t)}$,
- transformatą Laplace'a $\boldsymbol{f^*(s)}$,
- wartością oczekiwaną $\boldsymbol{\theta}$,
- odchyleniem standardowym $\boldsymbol{\sigma}$.

Ogólne

Wszystkie zmienne losowe oprócz T_1 mają identyczne rozkłady jak w strumieniu prostym, T_1ma inny rozkład określony:

- dystrybuantą $\boldsymbol{F_1(t)}$,
- gęstością $\boldsymbol{f_1(t)}$,
- transformatą Laplace'a $\boldsymbol{f_1{}^*(s)}$,
- wartością oczekiwaną $\boldsymbol{\theta_1}$,
- odchyleniem standardowym $\boldsymbol{\sigma_1}$.

Miary niezawodnościowe

1. Czas do r-tej odnowyS_r

$S_r = T_1 + T_2 + T_3 + \cdots + T_r$ - zmienna losowa dla której:

Dystrybuanta:

$$\boldsymbol{K_r(t) = L^{-1}\{K_r^*(s)\}}$$

Gęstość :

$$\boldsymbol{k_r(t) = L^{-1}\{k_r^*(s)\}}$$

Transformata Laplace'a funkcji $g(x)$:

$$\boldsymbol{g^*(s) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-sx}dx}$$

Dla strumienia prostego

$$\boldsymbol{k_r^*(s) = \left(f^*(s)\right)^r}$$

$$\boldsymbol{K_r^*(s) = \frac{1}{s}k_r^*(s) = \frac{1}{s}\left(f^*(s)\right)^r}$$

Dla strumienia ogólnego

$$\boldsymbol{k_r^*(s) = f_1{}^*(s)\left(f^*(s)\right)^{r-1}}$$

$$\boldsymbol{K_r^*(s) = \frac{1}{s}k_r^*(s) = \frac{1}{s}f_1{}^*(s)\left(f^*(s)\right)^{r-1}}$$

Dla $t \to \infty$ zmienna losowa S_r dąży do rozkładu normalnego $N\left(r \cdot \theta, \sigma \cdot \sqrt{r}\right)$

Michał Kapałka
mkapalka@wat.edu.pl

- **Zadanie 1:** Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że 7-me uszkodzenie wystąpi po chwili t_1
$$P\{S_7 \geq t_1\} = 1 - K_7(t_1)$$
$$K_7^*(s) = \frac{1}{s}\left(\frac{\lambda}{\lambda + s}\right)^7$$
- **Zadanie 2:** Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że do chwili t_2 będzie co najmniej 5 napraw
$$P\{S_5 < t_2\} = K_5(t_2)$$
$$K_5^*(s) = \frac{1}{s}\left(\frac{\lambda}{\lambda + s}\right)^5$$

2. Proces stochastyczny $N(t)$ - liczba odnowień do chwili t

$$P\{N(t) < r\} = P\{S_r > t\}$$
$$P\{N(t) = r\} = K_r(t) - K_{r+1}(t)$$

$$P\{N(t) < r\} = P\{S_r > t\} = 1 - K_r(t)$$
$$P\{N(t) > r\} = P\{S_{r+1} < t\} = K_{r+1}(t)$$
$$P\{N(t) = r\} + P\{N(t) > r\} + P\{N(t) < r\} = 1$$

Dla $t \to \infty$ proces $N(t)$ dąży do

$$N\left(\frac{t}{\theta}, \frac{(\sigma \cdot \sqrt{t})}{\theta^{\frac{3}{2}}}\right)$$

- **Zadanie 3:** Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że do chwili t_3 będzie dokładnie 8 uszkodzeń

$$P\{N(t_3) = 8\} = K_8(t_3) - K_9(t_3)$$
$$K_8^*(s) = \frac{1}{s}\left(\frac{\lambda}{\lambda + s}\right)^8 ; K_9^*(s) = \frac{1}{s}\left(\frac{\lambda}{\lambda + s}\right)^9$$

3. Funkcja odnowy $H(t)$ - oczekiwana liczba odnowień do chwili t

$$\boldsymbol{H(t) = E\{N(t)\}}$$

Równanie odnowy: $\boldsymbol{H^*(s) = F_1^*(s) + H^*(s) \cdot f^*(s)}$

Dla strumienia prostego
$$H^*(s) = \frac{1}{s}\frac{f^*(s)}{1 - f^*(s)}$$

Dla strumienia ogólnego
$$H^*(s) = \frac{1}{s}\frac{f_1^*(s)}{1 - f^*(s)}$$

4. Gęstość odnowy $h(t)$

$$h(t) = \frac{dH(t)}{dt}$$

Dla strumienia prostego
$$H^*(s) = \frac{f^*(s)}{1 - f^*(s)}$$

Dla strumienia ogólnego
$$H^*(s) = \frac{f_1^*(s)}{1 - f^*(s)}$$

Michał Kapałka
mkapalka@wat.edu.pl

- **Zadanie 4:** Wyznaczyć oczekiwaną liczbę napraw do chwili t_4

$$H(t_4)=?,\quad H^*(s)=\frac{1}{s}\frac{f^*(s)}{1-f^*(s)}=\frac{1}{s}\frac{\frac{\lambda}{\lambda+s}}{1-\frac{\lambda}{\lambda+s}}=\frac{1}{s}\frac{\frac{\lambda}{\lambda+s}}{\frac{\lambda+s-\lambda}{\lambda+s}}=\frac{1}{s}\frac{\frac{\lambda}{\lambda+s}}{\frac{\lambda+s-\lambda}{\lambda+s}}=\frac{1}{s^2}$$

Można pokazać, że jeśli $H^*(s)=\frac{1}{s^2}$, to korzystając z formuły na transformatę Laplace'a $L(t^n e^{-at})=\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$

mamy: $H(t_4)=\lambda t_4$,bo n=1 i a=0

- **Zadanie 5:** Wyznaczyć oczekiwaną liczbę uszkodzeń w przedziale czasu (t_5,t_6)

$$H(t_6)-H(t_5)=\lambda t_6-\lambda t_5$$

5. Miary graniczne dla $t\to\infty$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{H(t)}{t}=\frac{1}{\theta}\ ;\ dla\ dużych\ t:\ \ H(t)=\frac{t}{\theta}$$

Tw. Blackwella $$\lim_{t\to\infty}[H(t+\tau)-H(t)]=\frac{\tau}{\theta}$$

- **Zadanie 6:** Wyznaczyć oczekiwaną graniczną liczbę uszkodzeń w przedziale (t_7,t_8)

$$\lim_{t_7\to\infty}\big(H(t_8)-H(t_7)\big)=\frac{t_8-t_7}{\frac{1}{\lambda}}=\lambda(t_8-t_7)$$

Wynik, jak poprzednio, ale tylko dla rozkładu wykładniczego (ahistorycznego)

- **Zadanie 7:** Wyznaczyć oczekiwaną graniczną liczbę napraw do chwili t_9

$$\lim_{t\to\infty}H(t)=\frac{t}{\Theta}$$

$$H(t_9)=\lambda t_9$$

- **Zadanie 8:** Wyznaczyć rozkład granicznej liczby uszkodzeń w chwili t_{10}

$N(t)\xrightarrow[t\to\infty]{}N(m,\sigma')$, gdzie $m=\frac{t}{\Theta}$, $\sigma'=\frac{\sigma\sqrt{t}}{\Theta^{\frac{3}{2}}}$, pamiętamy, że dla rozkładu wykładniczego σ=1/λ

zatem N(t_{10}) dąży do rozkładu $N\left(\frac{t_{10}}{\Theta},\frac{\sigma\sqrt{t_{10}}}{\Theta^{\frac{3}{2}}}\right)=N\left(\lambda t_{10},\sqrt{\lambda t_{10}}\right)$

- **Zadanie 9:** Wyznaczyć graniczne prawdopodobieństwo tego, że do chwili t_{11}będzie co najmniej 50 uszkodzeń

$$P(S_{50}<t_{11})=K_{50}(t_{11})\cong \mathbf{F}_{\mathbf{normalny}}(t_{11})$$

$$S_{50}\xrightarrow[t\to\infty]{}N(50\cdot\theta,\sigma\cdot\sqrt{50})\ ,\ N(m,\sigma)=N\big(50\Theta,\sigma\sqrt{50}\big)=N\left(\frac{50}{\lambda},\frac{\sqrt{50}}{\lambda}\right)$$

- **Zadanie 10:** Wyznaczyć graniczne prawdopodobieństwo tego, że do chwili t_{12} będzie mniej niż 100 napraw

$$P(S_{100}\geq t_{12})=1-K_{100}(t_{12})\cong 1-\mathbf{F}_{\mathbf{normalny}}(t_{12})$$

$$S_{100}\xrightarrow[t\to\infty]{}N(100\cdot\theta,\sigma\cdot\sqrt{100})\ \ N(m,\sigma)=N\big(100\Theta,\sigma\sqrt{100}\big)=N\left(\frac{100}{\lambda},\frac{10}{\lambda}\right)$$

Michał Kapałka
mkapalka@wat.edu.pl

6. Prawdopodobieństwo $P(t, t+\tau)$braku uszkodzenia w przedziale $(t, t+\tau)$

$$\boldsymbol{P(t,t+\tau) = 1 - F_1(t+\tau) + \int_0^t [1 - F(t+\tau-x)]h(x)dx}$$

Tw. Smitha

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t \mathbf{g(t-x)}h(x)dx = \frac{1}{\theta} \int_0^\infty g(u)du$$

Prawdopodobieństwo graniczne braku uszkodzenia w przedziale $(t, t+\tau)$

$$P(\tau) = \lim_{t\to\infty} P(t,t+\tau) = \frac{1}{\theta} \int_\tau^\infty [1 - F(y)]\, dy$$

- **Zadanie 11:** Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że w przedziale (t_{13},t_{14}) nie będzie uszkodzeń

$$P(t_{13}, t_{14}) = 1 - F(t_{14}) + \int_0^{t_{13}} [1 - F(t_{14} - \tau)]h(\tau)d\tau$$

h(t) wyznaczamy z formuły $h^*(s) = \frac{f^*(s)}{1 - f^*(s)} = \frac{\lambda}{s}$, zatem h(t)=λ, więc

$$P(t_{14}, t_{13}) = e^{-\lambda t_{14}} + \int_0^{t_{13}} \left[e^{-\lambda(t_{14}-\tau)}\right]\lambda d\tau = e^{-\lambda t_{14}} + \lambda e^{-\lambda t_{14}} \left[e^{\lambda\tau}\right]_0^{t_{13}} = e^{-\lambda(t_{14}-t_{13})}$$

- **Zadanie 12:** Wyznaczyć graniczne prawdopodobieństwo tego, że w przedziale czasu (t_{15},t_{16}) nie będzie uszkodzeń

ze wzoru

$$\boldsymbol{P(\tau)} = \frac{1}{\theta} \int_\tau^\infty [1 - F(t)]\, dt$$

mamy $P(t_{16} - t_{15}) = \frac{1}{\theta} \int_{t_{16}-t_{15}}^{\infty} e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda(t_{16}-t_{15})}$

7. Pozostały czas zdatności ξ_t, jeśli od ostatniej odnowy minął czas t

$$P\{\xi_t > \tau\} = P(t, t+\tau)$$

$$\boldsymbol{F_{\xi_t} = P(t,t+\tau) = 1 - F_1(t+\tau) + \int_0^t [1 - F(t+\tau-x)]h(x)dx}$$

Dla dużych t:

$$F_\xi = \frac{1}{\theta} \int_\tau^\infty [1 - F(y)]\, dy$$

$$E\{\xi\} = \int_0^\infty P(\tau)d\tau = \frac{\theta}{2} + \frac{\sigma^2}{2\theta}$$

Michał Kapałka
mkapalka@wat.edu.pl