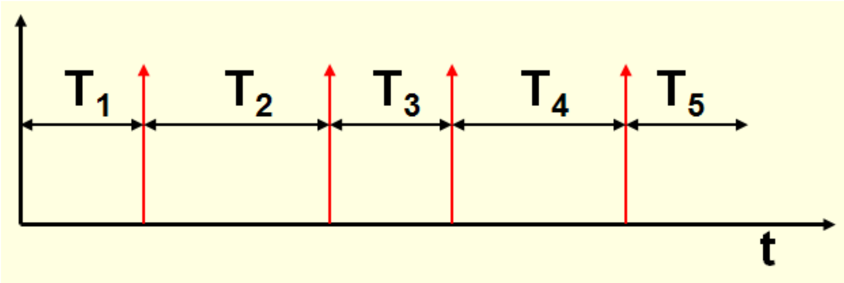
Elementy teorii niezawodności

Ćwiczenia nr 3: Obiekty proste odnawialne z zerowym czasem odnowy

Jedynymi istotnymi zdarzeniami w eksploatacji obiektu prostego odnawialnego z zerowa odnową są chwile uszkodzeń, które przy zerowej odnowie, są jednocześnie chwilami odnów.



Przyjmujemy rozkład czasu T do uszkodzenia dla **strumienia ogólnego:**

$\boldsymbol{T_1}$ **– rozkład gamma** z parametrami a, b

$$F_1(t)=\int_0^t \frac{1}{\Gamma(a)} b^a x^{a-1} e^{-bx}dx=\frac{1}{\Gamma(a)} b^a \int_0^t x^{a-1} e^{-bx}dx, \qquad f_1^*(s)=\left(\frac{b}{b+s}\right)^a$$

$\boldsymbol{T_2 T_3}$, ... **-rozkład Erlanga 2 rzędu z parametrem** λ

$$F(\mathbf{t})=1-\sum_{\mathbf{i=0}}^{\mathbf{n-1}} \frac{(\lambda \mathbf{t})^i}{i!} e^{-\lambda t}=1-\sum_{\mathbf{i}=0}^{\mathbf{1}} \frac{(\lambda \mathbf{t})^i}{i!} e^{-\lambda t}=1-e^{-\lambda t}-\lambda t e^{-\lambda t}, \qquad f^*(s)=\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^2$$

Strumienie odnów

Proste

Wszystkie zmienne losowe T_1, T_2, ... mają identyczne rozkłady określone:

- dystrybuantą $\boldsymbol{F(t)}$,
- gęstością $\boldsymbol{f(t)}$,
- transformatą Laplace'a $\boldsymbol{f^*(s)}$,
- wartością oczekiwaną $\boldsymbol{\theta}$,
- odchyleniem standardowym $\boldsymbol{\sigma}$.

Ogólne

Wszystkie zmienne losowe oprócz T_1 mają identyczne rozkłady jak w strumieniu prostym, T_1ma inny rozkład określony:

- dystrybuantą $\boldsymbol{F_1(t)}$,
- gęstością $\boldsymbol{f_1(t)}$,
- transformatą Laplace'a $\boldsymbol{f_1^*(s)}$,
- wartością oczekiwaną $\boldsymbol{\theta_1}$,
- odchyleniem standardowym $\boldsymbol{\sigma_1}$.

Michał Kapałka
mkapalka@wat.edu.pl

Miary niezawodnościowe

1. Czas do r-tej odnowy S_r

$S_r = T_1 + T_2 + T_3 + \cdots + T_r$ - zmienna losowa dla której:

Dystrybuanta:

$$\boldsymbol{K_r(t) = L^{-1}\{K_r^*(s)\}}$$

Gęstość :

$$\boldsymbol{k_r(t) = L^{-1}\{k_r^*(s)\}}$$

Transformata Laplace'a funkcji $g(x)$:

$$\boldsymbol{g^*(s) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-sx}dx}$$

Dla strumienia prostego

$$\boldsymbol{k_r^*(s) = \left(f^*(s)\right)^r}$$

$$\boldsymbol{K_r^*(s) = \frac{1}{s}k_r^*(s) = \frac{1}{s}\left(f^*(s)\right)^r}$$

Dla strumienia ogólnego

$$\boldsymbol{k_r^*(s) = f_1{}^*(s)\left(f^*(s)\right)^{r-1}}$$

$$\boldsymbol{K_r^*(s) = \frac{1}{s}k_r^*(s) = \frac{1}{s}f_1{}^*(s)\left(f^*(s)\right)^{r-1}}$$

Dla $t \to \infty$ zmienna losowa S_r dąży do rozkładu normalnego $N\left(r \cdot \theta, \sigma \cdot \sqrt{r}\right)$

- **Zadanie 1:** Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że 7-me uszkodzenie wystąpi po chwili t_1

$$P(S_7 \ge t_1) = 1 - K_7(t_1), \quad K_7^*(s) = \frac{1}{s} f_1^*(s)\left(f^*(s)\right)^6 = \frac{1}{s}\left(\frac{b}{b+s}\right)^a \left(\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^2\right)^6 = \frac{1}{s}\left(\frac{b}{b+s}\right)^a \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^{12}$$

- **Zadanie 2:** Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że do chwili t_2 będzie co najmniej 5 napraw

$$P(S_5 < t_2) = K_5(t_2), \quad K_5^*(s) = \frac{1}{s} f_1^*(s)\left(f^*(s)\right)^4 = \frac{1}{s}\left(\frac{b}{b+s}\right)^a \left(\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^2\right)^4 = \frac{1}{s}\left(\frac{b}{b+s}\right)^a \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^8$$

2. Proces stochastyczny $N(t)$ - liczba odnowień do chwili t

$$P\{N(t) < r\} = P\{S_r > t\}$$

$$P\{N(t) = r\} = K_r(t) - K_{r+1}(t)$$

$$P\{N(t) < r\} = P\{S_r > t\} = 1 - K_r(t)$$

$$P\{N(t) > r\} = P\{S_{r+1} < t\} = K_{r+1}(t)$$

$$P\{N(t) = r\} + P\{N(t) > r\} + P\{N(t) < r\} = 1$$

Dla $t \to \infty$ proces $N(t)$ dąży do

$$N\left(\frac{t}{\theta}, \frac{\left(\sigma \cdot \sqrt{t}\right)}{\theta^{\frac{3}{2}}}\right)$$

- **Zadanie 3:** Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że do chwili t_3 będzie dokładnie 8 uszkodzeń

$$P(N(t_3) = 8) = K_8(t_3) - K_9(t_3),$$

$$K_8^*(s) = \frac{1}{s}\left(\frac{b}{b+s}\right)^a \left(\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^2\right)^7 = \frac{1}{s}\left(\frac{b}{b+s}\right)^a \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^{14} \quad K_9^*(s) = \frac{1}{s}\left(\frac{b}{b+s}\right)^a \left(\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^2\right)^8 = \frac{1}{s}\left(\frac{b}{b+s}\right)^a \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^{16}$$

Michał Kapałka
mkapalka@wat.edu.pl

3. Funkcja odnowy $H(t)$ - oczekiwana liczba odnowień do chwili t

$$\boldsymbol{H(t) = E\{N(t)\}}$$

Równanie odnowy: $\boldsymbol{H^*(s) = F_1^*(s) + H^*(s) \cdot f^*(s)}$

Dla strumienia prostego

$$H^*(s) = \frac{1}{s}\frac{f^*(s)}{1 - f^*(s)}$$

Dla strumienia ogólnego

$$H^*(s) = \frac{1}{s}\frac{f_1^*(s)}{1 - f^*(s)}$$

4. Gęstość odnowy $h(t)$

$$h(t) = \frac{dH(t)}{dt}$$

Dla strumienia prostego

$$H^*(s) = \frac{f^*(s)}{1 - f^*(s)}$$

Dla strumienia ogólnego

$$H^*(s) = \frac{f_1^*(s)}{1 - f^*(s)}$$

- **Zadanie 4:** Wyznaczyć oczekiwaną liczbę napraw do chwili t_4

$$H(t_4) = ?,\quad H^*(s) = \frac{1}{s}\frac{f_1^*(s)}{1 - f^*(s)} = \frac{1}{s}\frac{\left(\frac{b}{b+s}\right)^a}{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + s}\right)^2}$$

- **Zadanie 5:** Wyznaczyć oczekiwaną liczbę uszkodzeń w przedziale czasu (t_5, t_6)

$$H(t_6) - H(t_5) = ?$$

Jak w poprzednim punkcie.

5. Miary graniczne dla $t \to \infty$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{H(t)}{t} = \frac{1}{\theta}\ ;\ dla\ dużych\ t:\ \ H(t) = \frac{t}{\theta}$$

Tw. Blackwella $\boldsymbol{\lim_{t\to\infty}[H(t+\tau) - H(t)] = \frac{\tau}{\theta}}$

- **Zadanie 6:** Wyznaczyć oczekiwaną graniczną liczbę uszkodzeń w przedziale (t_7, t_8)

$$\lim_{t_7\to\infty}\big(H(t_8) - H(t_7)\big) = \frac{a}{\Theta}\quad a = t_8 - t_7, \Theta\ =\ E(T) = \tfrac{2}{\lambda}(r.Erlanga)$$

$$\lim_{t_7\to\infty}\big(H(t_8) - H(t_7)\big) = \frac{t_8 - t_7}{\frac{2}{\lambda}} = \frac{\lambda}{2}(t_8 - t_7)$$

- **Zadanie 7:** Wyznaczyć oczekiwaną graniczną liczbę napraw do chwili t_9

$$\lim_{t\to\infty} H(t) = \frac{t}{\Theta}$$

$$H(t_9) = \frac{\lambda}{2}\ t_9$$

Michał Kapałka
mkapalka@wat.edu.pl

- **Zadanie 8:** Wyznaczyć rozkład granicznej liczby uszkodzeń w chwili t_{10}

  $N(t)\underset{t\to\infty}{\longrightarrow} N(m,\sigma')$, gdzie $m=\frac{t}{\Theta}$, $\sigma'=\frac{\sigma\sqrt{t}}{\Theta^{\frac{3}{2}}}$, pamiętamy, że dla rozkładu Erlanga $\sigma=\frac{\sqrt{2}}{\lambda}$

  zatem N(t_{10}) dąży do rozkładu $N\left(\frac{t_{10}}{\Theta},\frac{\sigma\sqrt{t_{10}}}{\Theta^{\frac{3}{2}}}\right)=N\left(\frac{\lambda}{2}t_{10},\frac{\frac{\sqrt{2}}{\lambda}}{\left(\frac{2}{\lambda}\right)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{t_{10}}\right)=N\left(\frac{\lambda t_{10}}{2},\frac{\sqrt{\lambda t_{10}}}{2}\right)$

- **Zadanie 9:** Wyznaczyć graniczne prawdopodobieństwo tego, że do chwili t_{11}będzie co najmniej 50 uszkodzeń

  $$P(S_{50}<t_{11})=K_{50}(t_{11})\cong \mathbf{F}_{\mathbf{normalny}}(t_{11})$$

  $$S_{50}\underset{t\to\infty}{\longrightarrow} N(50\cdot\theta,\sigma\cdot\sqrt{50}),\ N(m,\sigma')=N\left(50\Theta,\sigma\sqrt{50}\right)=N\left(\frac{100}{\lambda},\frac{\sqrt{100}}{\lambda}\right)$$

- **Zadanie 10:** Wyznaczyć graniczne prawdopodobieństwo tego, że do chwili t_{12} będzie mniej niż 100 napraw

  $$P(S_{100}\geq t_{12})=1-K_{100}(t_{12})\cong 1-\mathbf{F}_{\mathbf{normalny}}(t_{12})$$

  $$S_{100}\underset{t\to\infty}{\longrightarrow} N(100\cdot\theta,\sigma\cdot\sqrt{100})\ N(m,\sigma')=N\left(100\Theta,\sigma\sqrt{100}\right)=N\left(\frac{200}{\lambda},\frac{10\sqrt{2}}{\lambda}\right)$$

6. Prawdopodobieństwo $P(t,t+\tau)$braku uszkodzenia w przedziale $(t,t+\tau)$

$$\boldsymbol{P(t,t+\tau)=1-F_1(t+\tau)+\int_0^t[1-F(t+\tau-x)]h(x)dx}$$

Tw. Smitha

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t \mathbf{g(t-x)}\boldsymbol{h(x)dx}=\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\theta}}\int_0^\infty \boldsymbol{g(u)du}$$

Prawdopodobieństwo graniczne braku uszkodzenia w przedziale $(t,t+\tau)$

$$P(\tau)=\lim_{t\to\infty}P(t,t+\tau)=\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\theta}}\int_\tau^\infty[1-F(y)]\,\boldsymbol{dy}$$

- **Zadanie 11:** Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że w przedziale (t_{13},t_{14}) nie będzie uszkodzeń

  $$P(t_{13},t_{14})=1-F_1(t_{14})+\int_0^{t_{13}}[1-F(t_{14}-\tau)]h(\tau)d\tau$$

  h(t) wyznaczamy z formuły $h^*(s)=\frac{\left(\frac{b}{b+s}\right)^a}{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^2}$, zatem h(t)=λ, więc

  $$P(t_{14},t_{13})=1-\frac{1}{\Gamma(a)}b^a\int_0^{t_{14}}x^{a-1}e^{-bx}dx+\int_0^{t_{13}}\left[e^{-\lambda(t_{14}-\tau)}+\lambda(t_{14}-\tau)e^{-\lambda(t_{14}-\tau)}\right]h(\tau)d\tau$$

Michał Kapałka
mkapalka@wat.edu.pl

- **Zadanie 12:** Wyznaczyć graniczne prawdopodobieństwo tego, że w przedziale czasu (t_{15},t_{16}) nie będzie uszkodzeń

ze wzoru

$$\boldsymbol{P(\tau)} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\theta}}\int_{\boldsymbol{\tau}}^{\infty}[1-F(t)]\,\boldsymbol{dt}$$

mamy $P(t_{16}-t_{15}) = \frac{1}{\theta}\int_{t_{16}-t_{15}}^{\infty} e^{-\lambda t} + \lambda t e^{-\lambda t} dt = \frac{\lambda}{2}\int_{t_{16}-t_{15}}^{\infty} e^{-\lambda t} dt + \frac{\lambda^2}{2}\int_{t_{16}-t_{15}}^{\infty} t e^{-\lambda t} dt$

Uwaga:

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1} e^{ax} dx$$

7. Pozostały czas zdatności ξ_t, jeśli od ostatniej odnowy minął czas t

$$P\{\xi_t > \tau\} = P(t, t+\tau)$$

$$\boldsymbol{F_{\xi_t} = P(t,t+\tau) = 1 - F_1(t+\tau) + \int_0^t [1 - F(t+\tau-x)]h(x)dx}$$

Dla dużych t:

$$\boldsymbol{F_\xi} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\theta}}\int_{\boldsymbol{\tau}}^{\infty}[1-F(y)]\,\boldsymbol{dy}$$

$$E\{\xi\} = \int_0^{\infty} P(\tau)d\tau = \frac{\theta}{2} + \frac{\sigma^2}{2\theta}$$